在上一章中，我们看到了流体模拟的关键步骤是求解对流方程

数值形式为

给定速度场(在MAC网格上离散),时间步长和当前场量，得出在该持续时间内通过速度场对平流的结果的近似值.

这里需要重复：对流只能在无散度速度场内调用,即满足不可压缩性约束，同时也满足所需的边界条件.否则可能会导致特殊的artifact,例如流体及其动量的不守恒.

3.1 半拉格朗日对流

解决一个时间步长的明显方法是简单地写出PDE,例如在一维中:

然后用有限差分替换导数.例如,如果我们使用前向欧拉作为时间导数,而使用精确的中心差作为空间导数,则得到

重新排列各项,得到的直接公式

乍一看,这似乎还不错.但是这里潜伏着灾难性的问题!

首先,事实证明,对于空间导数的离散化而言,前向欧拉是无条件不稳定的:无论我们使多么小,它最终都会爆炸!(由中心差分产生的雅可比行列式的特征值是虚数,因此始终在稳定区域之外.不过不用担心:我们就会找到一种很快起作用的方法.)

即使我们用更稳定的时间积分技术代替前向欧拉,或者我们以某种方式确切地解决了PDE的时间部分,空间离散也会给我们带来很多麻烦.乍一看,原因尚不清楚:毕竟,这是对导数的相当准确的估计,并且一些花哨的分析可以表明,这种方案将完全保留问题的“能量”（2-范数）性质，就像确切的解决方案一样.但是，在一个简单的一维问题上进行尝试将立即显示出潜伏在这里的问题.还记得上一章关于标准中心差的零空间问题的讨论吗?好吧，它在这里也抬起了丑陋的头:解决方案的高频锯齿状分量,(在这里,频率是指空间中的频率,就好像您对函数执行了傅立叶变换一样,将其表示为不同空间频率的正弦或余弦波之和.高频分量对应于在短距离内变化的尖锐特征,而低频分量对应于平滑的大规模特征.)例如，错误地注册为具有零或接近零的空间导数,因此不会随时间向前发展-或至少移动的速度比它们应移动的速度慢得多.同时,低频分量得到精确处理,并以几乎正确的速度移动.因此,低频成分最终会与高频成分分离开来,您会出现各种奇怪的高频摆动和振荡,这种振荡不应该一直存在!

我们不会对简单的中心差分问题进行更严格的分析,但是请放心,这里有大量高性能的数值分析工具,不仅可以仔细地识别病症,还可以提供更复杂的有限差分公式来治愈空间导数.

相反，我们将首先采用一种称为半拉格朗日方法的差分,更简单且具有物理动机的方法. 拉格朗日一词应提醒您,对流方程在拉格朗日框架中是微不足道的,如果使用粒子系统方法,则当我们将粒子移动通过速度场时,它会自动求解.也就是说,要在空间某个点处获取的新值，理论上我们仅找到以结尾的粒子并查找其的值.

我们可以在网格上应用该推理,以得到由Stam [Sta99]引入图形的半拉格朗日方法. 我们想找出在给定网格点处的新值,并以拉格朗日方式进行计算,为了做到这点,我们需要找出以该网格点结束的粒子所拥有的的旧值.粒子在速度场中移动,我们知道它在哪里结束-因此要找到它在哪里开始，我们只需从网格点向后穿过速度场即可.我们可以从此起点获取旧值,它将是网格点上的的新值!但是,如果那个起点不在网格上怎么办?在这种情况下，我们只需从网格上的旧值内插的旧值,就可以了.

让我们通过公式慢慢地再次进行说明.我们正在查看的网格点在空间中的位置为.我们希望在这里找到的新值，我们将其称为.从对流的理解中我们知道，如果一个具有旧值的假设粒子以终止,当它在速度场中经过时间步长时,.所以问题是,我们如何找出?

第一步是找出这个虚构粒子的起点,我们将其称为.粒子根据简单的常微分方程运动

经过时间后在停止. 如果现在向后倒退时间，则可以从反向运行到粒子的起点-即，找到粒子从“开始”反向通过速度场抵达的地方.图(3.1)说明了该路径.估算最简单方法是在时间上向后使用一步“前向”欧拉:

在这里，我们使用在网格点处估算的速度通过流场后退一步.事实证明,欧拉有时是足够的,但是使用稍微更复杂的技术(例如更高阶的Runge-Kutta方法)可以获得明显更好的结果.请参阅附录A以查看时间积分方法.特别是,至少建议使用二阶Runge-Kutta方法作为最低要求,例如

在这里,采取了半步法,以获得一个中间位置,该位置近似于粒子沿着轨迹的一半位置. 在此中间位置从网格内插速度场,速度值最终用于获得.使用三阶方法可以获得更好的结果,尤其是在涡旋和其他旋转流动要素周围.附录中给出的RK3方案是最佳默认方案.取决于的大小（请参阅本章后面的内容）,将轨迹跟踪分成较小的子步以提高精度甚至是明智的.

现在我们知道了虚拟粒子的起始位置.接下来,我们必须找出旧值.很可能不在网格上，因此我们没有确切的值，但是通过在附近的网格点处对进行插值可以得到一个很好的近似值.通常使用三线性（二维双线性）插值,尽管这会带来严重的精度损失，我们将在本章结尾处进行修正.

将其放到公式中，我们的基本半拉格朗日公式是假设粒子跟踪算法已追溯到位置（通常使用上述RK2），

请注意，我描述的粒子纯粹是假设的。 在计算机中实际上没有创建任何粒子：我们仅使用拉格朗日粒子从概念上计算出欧拉对流步骤的更新公式。 由于我们几乎使用拉格朗日方法进行欧拉计算，因此称为半拉格朗日方法.

为了完整起见,在一维情况下让我们再次使用线性插值法对半拉格朗日运算进行说明. 对于网格点,粒子可追溯到.假设它位于区间中,令是该点在此区间的比例,则线性插值为.所以我们的更新是

在实践中，我们将需要平流速度场,还可能需要平流其他变量,例如烟雾密度或温度.通常,附加变量存储在网格单元中心,但是速度分量存储在上一章中讨论的交错网格位置.在这些情况下,我们将需要使用上一章结尾给出的适当平均速度来估计粒子轨迹.

3.2 边界条件